ETUDE DES CHAINES FERMEES

(1ère partie)

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

1 PRESENTATION

1.1 Objectifs

Analyser les comportements cinématique et statique d'un mécanisme c'est :

- Déterminer les relations entrées sorties du mécanisme.
- Déterminer le degré de mobilité du mécanisme.
- Déterminer le degré d'hyperstaticité du mécanisme.
- Modifier le mécanisme afin de le rendre isostatique si nécessaire.

1.2 Modèles retenus

1.2.1 CONCERNANT LES SOLIDES ET LES LIAISONS

- Les solides sont considérés comme indéformables.
- Les liaisons reliant les solides sont considérées comme parfaites cinématiquement (sans jeu) et statiquement (sans frottement). Les contacts sont bilatéraux.
- La masse de chaque solide est considérée comme nulle. Ainsi les effets dynamiques sont négligés et il est possible d'appliquer le principe fondamental de la statique à tout système matériel issu du mécanisme étudié.

1.2.2 GRAPHE DES LIAISONS D'UN MECANISME

1.2.2.1 Définitions

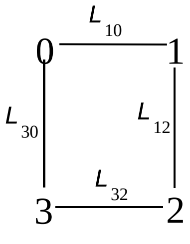
 Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

Le graphe des liaisons d'un mécanisme est une représentation plane permettant, à partir du schéma cinématique, d'identifier les liaisons normalisées liant les solides du mécanisme.

On définit ainsi :

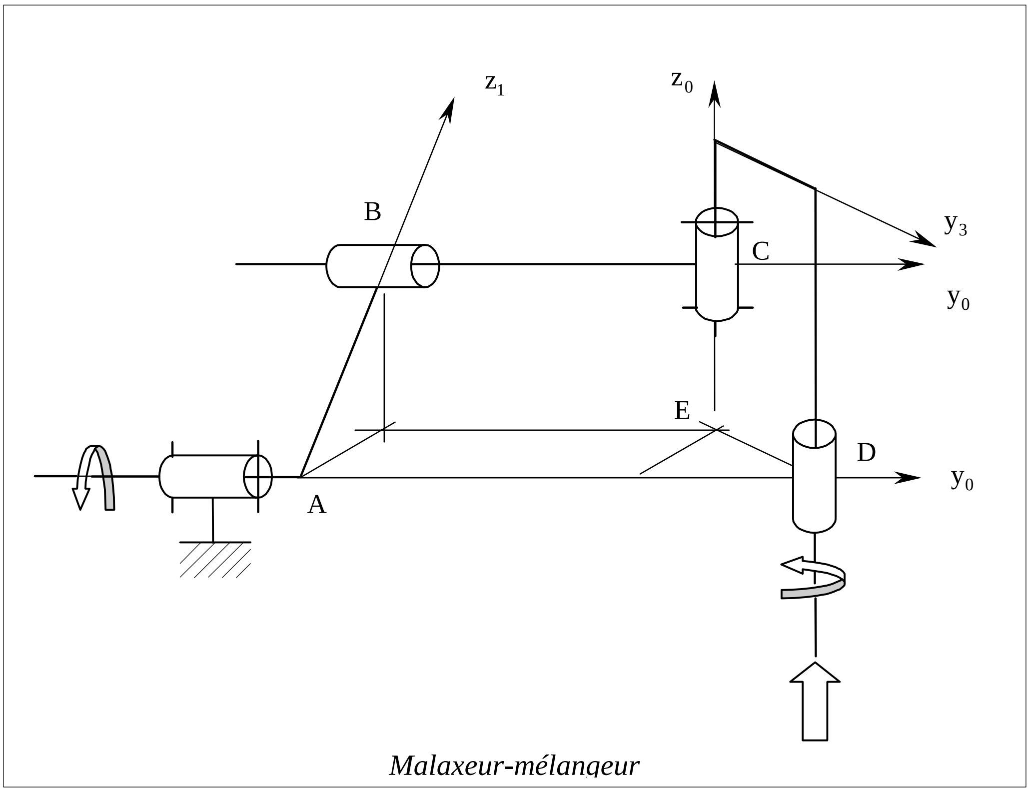
n	Nombre de solides (sauf le bâti) du mécanisme
l	Nombre de liaisons du mécanisme
$\gamma = l -$	Nombre de cycles indépendants

1.2.2.2 Graphe simple fermé : Malaxeur-mélangeur



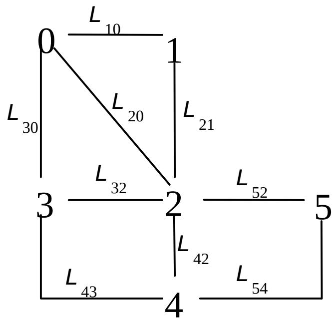
L_{10} : Pivot d'axe $(A, \vec{y}_0)$
L_{32} : Pivot d'axe $(C, \vec{z}_0)$
L_{30} : Pivot glissant d'axe $(D, \vec{z}_0)$
L_{21} : Pivot glissant d'axe $(B, \vec{y}_0)$

nb de solides (sauf le bâti) $n = 3$
nb de liaisons $l = 4$
nb de cycles indépendants $\gamma = 1$



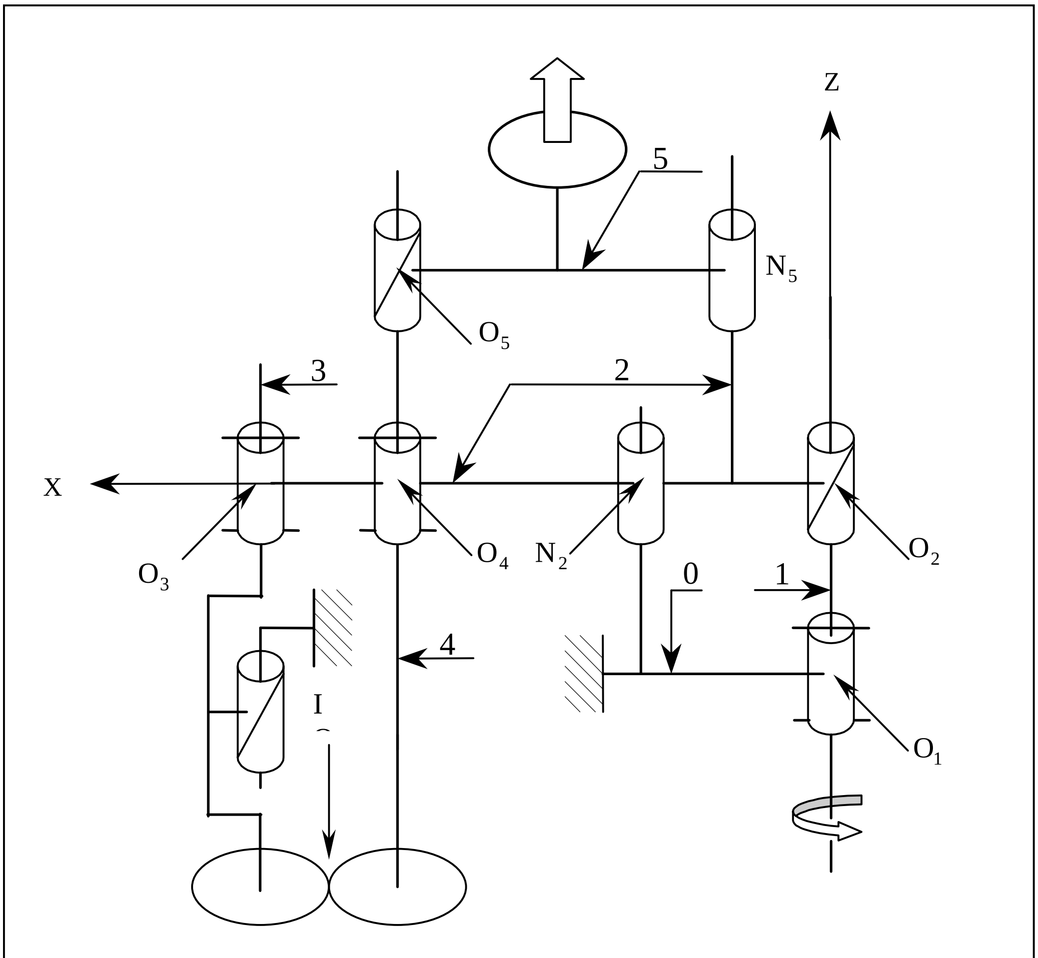
Malaxeur-mélangeur

1.2.2.3 Graphe complexe fermé : Elévateur télescopique



L_{10} : Pivot d'axe $(O_1, \vec{z})$
L_{21} : Hélicoïdale d'axe $(O_2, \vec{z})$
L_{30} : Hélicoïdale d'axe $(O_3, \vec{z})$
L_{20} : Pivot glissant d'axe $(N_2, \vec{z})$
L_{32}: Pivot d'axe $(O_1, \vec{z})$
L_{43} : Ponctuelle de normale $(I, \vec{x})$
L_{54} : Hélicoïdale d'axe $(O_5, \vec{z})$
L_{52} : Pivot glissant $(N_5, \vec{z})$
L_{42} : Pivot d'axe $(O_4, \vec{z})$

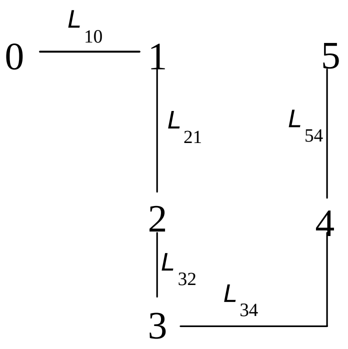
nb de solides $n = 5$
nb de liaisons $l = 9$
nb de cycles indépendants $\gamma = 4$



Elévateur télescopique

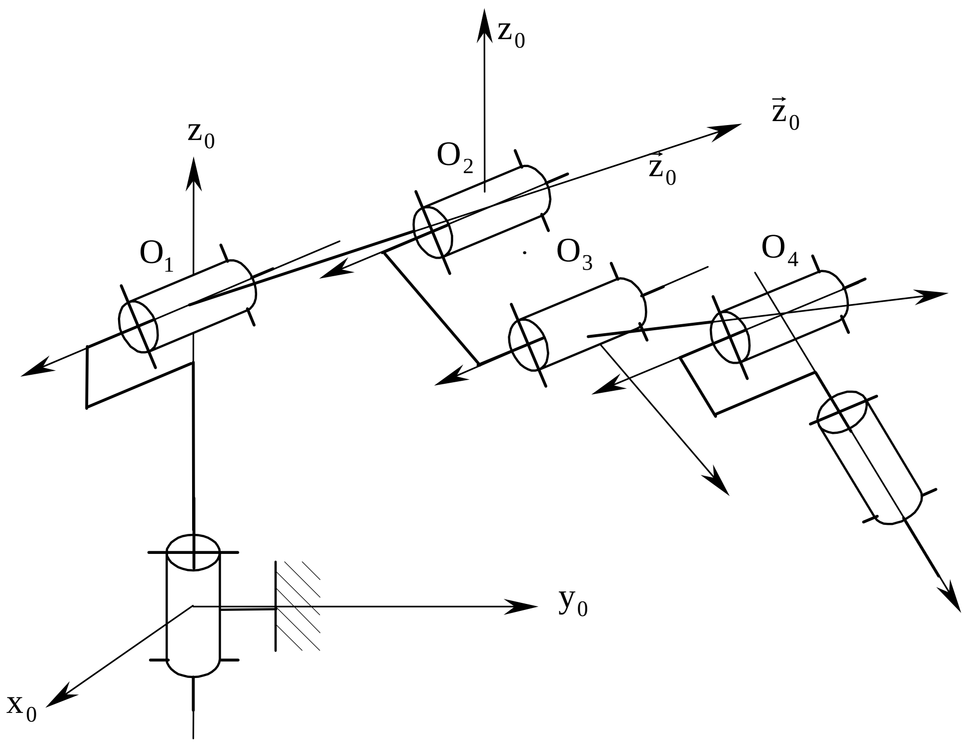
Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

1.2.2.4 Graphe ouvert : Robot Eric 5 axes



L_{10} : Pivot d'axe $(O_1, \vec{z}_1)$
L_{21} : Pivot d'axe $(O_1, \vec{x}_1)$
L_{32}: Pivot d'axe $(O_2, \vec{x}_1)$
L_{43} : Pivot d'axe $(O_3, \vec{x}_1)$
L_{54} : Pivot d'axe $(O_3, \vec{y}_4)$

nb de solides $n = 5$
nb de liaisons $l = 5$



Robot 5 axes

Les trois exemples traités ci-dessus montrent bien la diversité des mécanismes existant. Les chaînes de solides sont donc fermées ou ouvertes. L'étude qui suit est consacrée particulièrement aux chaînes fermées simples ou complexes.

2 ETUDE DES CHAINES FERMEES

2.1 Objectifs

L'étude des chaînes fermées est réalisée suivant les deux points de vue suivants :

- Une analyse géométrique et cinématique qui permet d'identifier la mobilité du mécanisme ainsi que la relation cinématique d'entrée sortie.
- Une analyse statique qui permet d'identifier le degré d'hyperstaticité du mécanisme ainsi que les conditions géométriques de positionnement des liaisons qui assurent un montage correct du mécanisme.

2.2 Analyse géométrique des chaînes fermées

2.2.1 OBJECTIFS

L'analyse géométrique permet de :

- **Etablir les relations liant les paramètres géométriques inconnus du mécanisme et les paramètres géométriques donnés.**
- **Déterminer la relation cinématique d'entrée-sortie.**

2.2.2 FERMETURE GEOMETRIQUE

La fermeture géométrique traduit, grâce à la relation de Chasles, la position relative des liaisons dans le mécanisme.

Si on appelle A_i le centre géométrique de la liaison $L_{i/i-1}, i \in [1,l]$, la fermeture géométrique s'écrit, par exemple :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_i A_{i+1}} = \overrightarrow{A_1 A_{n+1}} \qquad (1)}$$

2.2.3 METHODE DE RESOLUTION

2.2.3.1 Projection de (1) sur R $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

On obtient un système (E) homogène de 3 équations scalaires à N paramètres géométriques inconnus.

2.2.3.2 Rang géométrique r

Appelons r le nombre d'équations indépendantes du système (E)

On a donc : $r \leq 3$

Le système s'écrit alors :

$$\boxed{(A)(X) = (B)}$$

où

(X) désigne un vecteur unicolonne contenant r inconnues géométriques.

(B) désigne un vecteur unicolonne contenant $N - r$ paramètres géométriques donnés.

(A) désigne une matrice (r, r) des coefficients géométriques.

 Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

2.2.3.3 Relation entrée sortie

Il s'agit de déterminer (X) par résolution du système $(A)(X)=(B)$.

$$\boxed{(X)=(A^{-1})(B)} \qquad \text{si } \det(A)\neq 0$$

2.2.4 EXEMPLE TRAITE : MALAXEUR MELANGEUR

2.2.4.1 Description

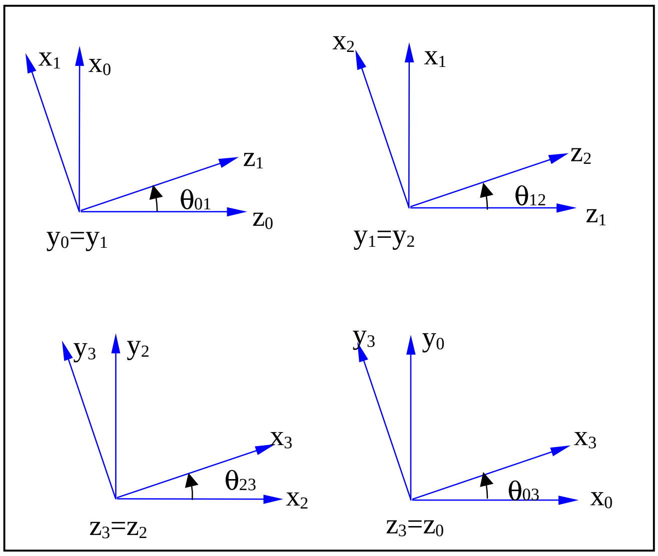
Le mécanisme dont le schéma cinématique est donné ci-dessous représente un malaxeur mélangeur. Un moto-réducteur non représenté entraîne le volant **1** en rotation autour de l'axe $(A,\vec{y}_0)$ Le déplacement de la bielle **2** ainsi produit provoque la rotation et la translation de la pale **3** par rapport au bâti **0.**

2.2.4.2 Liaisons entre solides

L_{10} : Pivot d'axe $(A,\vec{y}_0)$
L_{32} : Pivot d'axe $(C,\vec{z}_0)$
L_{30} : Pivot glissant d'axe $(D,\vec{z}_0)$
L_{21} : Pivot glissant d'axe $(B,\vec{y}_0)$

2.2.4.3 Paramétrage

$\overrightarrow{AB}=R\vec{z}_1$	$\overrightarrow{CB}=-\lambda\vec{y}_1 \qquad \lambda>0$
$\overrightarrow{DA}=-d\vec{y}_0$	$\overrightarrow{CD}=l\vec{y}_3-h\vec{z}_0$



2.2.4.4 Fermeture géométrique

La relation de Chasles permet d'écrire rapidement la fermeture géométrique.

Jacques AÏACHE – Jean-Marc CHÉREAU

$$\begin{array}{ccccccccc} \overrightarrow{AB} & + & \overrightarrow{BC} & + & \overrightarrow{CD} & + & \overrightarrow{DA} & = & \vec{0} \\ R\vec{z}_1 & + & \lambda\vec{y}_0 & + & l\vec{y}_3 & - & h\vec{z}_0 - d\vec{y}_0 & = & \vec{0} \end{array} \qquad (1)$$

2.2.4.5 Résolution

Par projection de (1) sur $R\,(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on obtient le système d'équations suivantes :

$$\begin{array}{l} (1).\vec{x}_0 \\ (1).\vec{y}_0 \\ (1).\vec{z}_0 \end{array} \quad \begin{cases} R\sin\theta_{01} & & & & - & l\sin\theta_{03} & = & 0 \\ & \lambda & - & d & + & l\cos\theta_{03} & = & 0 \\ R\cos\theta_{01} & & - & h & & & = & 0 \end{cases}$$

Le bilan est le suivant :

paramètres géométriques	$R, d, l, \theta_{01}, h, \lambda$ et θ_{03}	$N = 7$
paramètres géométriques donnés	$R, d, l,$ et θ_{01}	
paramètres géométriques inconnus	h, λ et θ_{03}	
rang géométrique		$r = 3$

Finalement, il vient (si $R \leq l$)

$$\boxed{\begin{array}{c} h(\theta_{01}) = R\cos\theta_{01} \\ \theta_{03} = \mathrm{Arc}\sin\left[\frac{R}{l}\sin\theta_{01}\right] \\ \lambda(\theta_{01}) = d - l\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2}\sin^2\theta_{01}} \end{array}}$$

2.2.4.6 Relation cinématique d'entrée-sortie

La relation cinématique d'entrée sortie est la relation liant le paramètre d'entrée $\dot{\theta}_{01}$ aux paramètres de sortie $\dot{\theta}_{03}$ et $\dot{h}$.

Après calculs, on obtient :

$$\boxed{\dot{\theta}_{03} = \frac{\frac{R}{l}\dot{\theta}_{01}\cos\theta_{01}}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2}\sin^2\theta_{01}}}}$$

$$\boxed{\dot{h}(\theta_{01}) = -R\dot{\theta}_{01}\sin\theta_{01}}$$

2.3 Analyse cinématique des chaînes fermées

2.3.1 INTERET DE L'ANALYSE CINEMATIQUE

L'analyse cinématique des mécanismes permet principalement de déterminer la relation cinématique d'entrée sortie du mécanisme étudié.

Deux situations se présentent couramment :

- **soit l'analyse est effectuée en vue de concevoir un mécanisme et le concepteur détermine alors les conditions cinématiques correctes de fonctionnement,**
- **soit l'analyse est effectuée en vue de vérifier les performances d'un mécanisme déjà existant et le concepteur détermine alors les relations cinématiques d'entrée sortie.**

2.3.2 OBJECTIFS

- **Etablir les relations liant les paramètres cinématiques inconnus du mécanisme et les paramètres cinématiques donnés.**
- **Déterminer la mobilité du mécanisme.**

2.3.3 FERMETURE CINEMATIQUE

Soit $\{\mathcal{V}\ (S_i / S_j)\}_A$ le torseur cinématique, au point A, du solide S_i dans son mouvement par rapport au solide S_j.

La fermeture cinématique s'écrit alors :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{V}\ (S_i / S_{i-1})\}_A = \{\mathcal{V}\ (S_n / S_0)\}_A}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\Omega}(S_i / S_{i-1}) = \vec{\Omega}(S_n / S_0) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{V}(A, S_i / S_{i-1}) = \vec{V}(A, S_n / S_0) \qquad (3)$$

2.3.4 METHODE DE RESOLUTION

2.3.4.1 Projection de (2) et (3) sur $\mathcal{R}\ (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

Pour chaque chaîne fermée, on obtient un système homogène de 6 équations scalaires. Le système total (E) contient 6γ équations à N_c paramètres cinématiques inconnus avec :

$$\boxed{N_c = \sum_{i=1}^{n+\gamma} n_{ci}}$$

où n_{ci} désigne le nombre de paramètres cinématiques indépendants de chaque liaison L_{ij}.

2.3.4.2 Rang cinématique

Le rang cinématique r_c est le nombre d'équations indépendantes du système (E). On a bien sûr $r_c \leq 6\gamma$.

Le système d'équations s'écrit alors : $\boxed{(A)(X) = (B)}$

où

(X) désigne un vecteur unicolonne contenant r_c inconnues cinématiques.

(B) désigne un vecteur unicolonne contenant $N_c - r_c$ paramètres cinématiques à fixer.

(A) désigne une matrice (r_c, r_c) des coefficients géométriques du mécanisme.

2.3.5 MOBILITE DU MECANISME

2.3.5.1 Définition

On appelle mobilité d'un mécanisme, notée m, le nombre de paramètres cinématiques à fixer pour déterminer les r_c inconnues cinématiques restantes.

On peut écrire :

$$\boxed{m = N_c - r_c}$$

2.3.5.2 Signification de m

Les mécanismes étudiés sont classables en 3 catégories :

Mobilité m	2^e membre (B)	Solution (X)
$m = 0$	$(B) = (0)$	$(X) = (0)$
$m = 1$	$(B) = \lambda(K)$	$(X) = \lambda(A^{-1})(K)$
$m > 1$	$(B) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (K_i)$	$(X) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (A)^{-1} (K_i)$

Mobilité m	Conclusions
$m = 0$	le mécanisme est bloqué
$m = 1$	le mécanisme est à transformation de mouvement (mobilité utile)
$m = m_u + m_i$	le mécanisme est à composition de mouvement et/ou à mobilités internes.

2.3.5.3 Mobilités interne et utile

On appelle mobilité utile, notée m_u, le nombre ***d'inconnues cinématiques indépendantes*** à fixer pour déterminer les relations entrées-sorties du mécanisme.

On appelle mobilité interne, notée m_i, le nombre ***d'inconnues cinématiques indépendantes*** du mécanisme quand on immobilise les liaisons d'entrée et les liaisons de sortie du mécanisme.

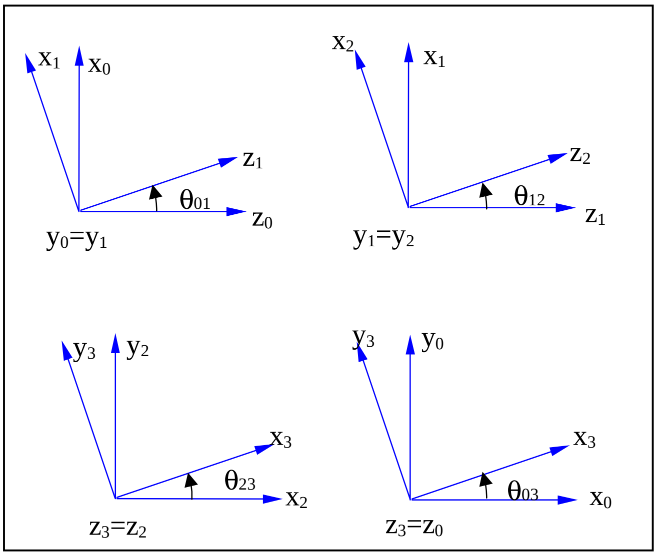
2.3.6 EXEMPLE TRAITE : MALAXEUR-MELANGEUR

2.3.6.1 Liaisons entre solides

L_{10} : Pivot d'axe $(A, \vec{y}_0)$ (entrée)
L_{32} : Pivot d'axe $(C, \vec{z}_0)$
L_{30} : Pivot glissant d'axe $(D, \vec{z}_0)$ (sortie)
L_{21} : Pivot glissant d'axe $(B, \vec{y}_0)$

2.3.6.2 Paramétrage

$\overrightarrow{AB} = R\vec{z}_1$	$\overrightarrow{CB} = -\lambda\vec{y}_1$
$\overrightarrow{DA} = -d\vec{y}_0$	$\overrightarrow{CD} = l\vec{y}_3 - h\vec{z}_0$



2.3.6.3 Torseurs cinématiques associés aux liaisons

$$\{V(S_1/S_0)\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \qquad \{V(S_2/S_1)\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & v_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$

$$\{V(S_3/S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{R_0} \qquad \{V(S_3/S_0)\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{30} & w_{30} \end{Bmatrix}_{R_0}$$

2.3.6.4 Fermeture cinématique

$$\{V(S_1/S_0)\}_D + \{V(S_2/S_1)\}_D + \{V(S_3/S_2)\}_D - \{V(S_3/S_0)\}_D = \{0\}$$

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_3/S_2) - \vec{\Omega}(S_3/S_0) = \vec{0} & (3) \\ \vec{V}(D,S_1/S_0) + \vec{V}(D,S_2/S_1) + \vec{V}(D,S_3/S_2) - \vec{V}(D,S_3/S_0) = \vec{0} & (4) \end{cases}$$

Calcul de $\vec{V}(D,S_2/S_1) = \vec{V}(C,S_2/S_1) + \overrightarrow{DC} \wedge \vec{\Omega}(S_2/S_1)$

$$\vec{V}(D,S_2/S_1) = v_{21}\vec{y}_0 - [l\vec{y}_3 - h\vec{z}_0] \wedge \beta_{21}\vec{y}_1$$

soit

$$\vec{V}(D,S_2/S_1) = v_{21}\vec{y}_0 + l\beta_{21}\sin\theta_{03}\vec{z}_0 - h\beta_{21}\vec{x}_0$$

Calcul de $\vec{V}(D,S_3/S_2) = \vec{V}(C,S_3/S_2) + \overrightarrow{DC} \wedge \vec{\Omega}(S_3/S_2)$

soit

$$\vec{V}(D,S_3/S_2) = \gamma_{32}\vec{z}_0 \wedge [l\vec{y}_3 - d\vec{z}_0] = -l\gamma_{32}\vec{x}_3$$

Projections de (3) et (4) sur R_0

$$\begin{array}{llllllll}
(1) & & & & & & 0 & = 0 \\
(2) & \beta_{10} & + & \beta_{21} & & & & = 0 \\
(3) & & & & & \gamma_{32} & - \ \gamma_{30} & = 0 \\
(4) & & & -h\beta_{21} & - & l\gamma_{32}\cos\theta_{03} & & = 0 \\
(5) & & & v_{21} & - & l\gamma_{32}\sin\theta_{03} & & = 0 \\
(6) & & & l\beta_{21}\sin\theta_{03} & & & - \ w_{30} & = 0
\end{array}$$

Le bilan est le suivant :

Inconnues cinématiques	$\beta_{10}, \beta_{21}, \gamma_{32}, \gamma_{30}, v_{21}$ et w_{30}	$N_c = 6$
Rang cinématique supposé		$r_c = 5$
Mobilité du mécanisme	$m = N_c - r_c$	$m = 1$
Paramètre d'entrée donné	β_{10}	
Paramètres cinématiques inconnus	$\beta_{21}, \gamma_{32}, \gamma_{30}, v_{21}$ et w_{30}	

2.3.6.5 Résolution du système d'équations

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -h & -l\cos\theta_{03} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l\sin\theta_{03} & 1 & 0 & 0 \\ l\sin\theta_{03} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \gamma_{32} \\ v_{21} \\ \gamma_{30} \\ w_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\boxed{\begin{array}{lcc} \beta_{21} & = & -\beta_{10} \\ \gamma_{32} & = & \dfrac{h\beta_{10}}{l\cos\theta_{03}} \\ \gamma_{30} & = & \gamma_{32} \\ v_{21} & = & h\beta_{10}\,tg\theta_{03} \\ w_{30} & = & -l\beta_{10}\sin\theta_{03} \end{array}}$$

si $\det A = -l\cos\theta_{03} \neq 0$

2.3.6.6 Relations entrée-sortie

$$\boxed{\begin{array}{lcc} \gamma_{30} & = & \dfrac{h\beta_{10}}{l\cos\theta_{03}} \\ w_{30} & = & -l\beta_{10}\sin\theta_{03} \end{array}}$$

avec $\sin\theta_{03} = \dfrac{R}{l}\sin\theta_{01}$

Vérifions que l'étude cinématique est conforme à l'étude géométrique. Pour cela calculons $w_{30} = \vec{V}(D,3/0).\vec{z}_0$

$$\vec{V}(D,3/0).\vec{z}_0 = \vec{V}(D/0).\vec{z}_0 - \vec{V}(D/3).\vec{z}_0 = -\vec{V}(D/3).\vec{z}_0$$

$$\vec{V}(D/3).\vec{z}_0 = -\left[\frac{d\overrightarrow{CD}}{dt}\right]_{B3}.\vec{z}_0 = \left[\frac{d\overrightarrow{h\vec{z}_0}}{dt}\right]_{B3}.\vec{z}_0 = \dot{h}$$

donc $\boxed{w_{30} = \dot{h} = -R\dot{\theta}_{01}\sin\theta_{01}}$ C.Q.F.D.